Brouwer の不動点定理とその周辺

ykyki[*]

2019 年 5 月 10 日

概要

高校数学の授業などで耳にしたことがある人がおそらく多いであろう, 中間値の定理というものがある. この定理は, 少し変形を加えることで「単位区間 $[0,1]$ から自身への任意の連続写像が不動点を持つ」と言い換えることができる. ここで単位区間を 1 次元球体と捉えると, n 次元への一般化が見えてくる. それは「n 次元球体から自身への任意の連続写像が不動点を持つ」という命題である. この命題こそが, タイトルに掲げた Brouwer の不動点定理である.

本講演では, 中間値の定理の証明から始め, 不動点定理の図形的証明を概説する. 加えて, いくつかの応用や発展についても紹介する. 予備知識としては, 高校数学以上のことは殆ど仮定しない. ただし, 実数の完備性から話をスタートするつもりなので, その性質を知っていることは前提とする.

目次

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ を自然数全体の集合, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.

1 連続写像と中間値の定理

本稿を通して $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ を正の自然数とする. n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の距離 $\rho(x, y)$ は

$$\rho(x, y) \ = \ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

と定義されている.

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ 内の点からなる点列 $(a_k)_k = (a_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N})$ が点 $p \in \mathbb{R}^n$ に**収束する**とは,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \, ; \ k \geq N \text{ ならば} \rho(p, a_k) < \epsilon$$

となることである. このことを $a_k \to p$ や $\lim_{k\to\infty} a_k = p$ のように表す. またこのとき, p は $(a_k)_k$ の**極限点**あるいは単に**極限**であるという. □

点列は常に収束する訳ではないが, その極限 $\lim_{k\to\infty} a_k$ は高々ひとつである.

演習 1.2. 成分表示を $a_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,n})$ や $p = (p_1, \ldots, p_n)$ としたとき, $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $(a_k)_k$ が点 p に収束することは, 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について, $\mathbb{R}$ 内の点列 $(a_{k,i})_k$ が実数 p_i に収束することと同値である. ■

概要でも書いた通り, 実数には完備性がある.

注意. $\mathbb{R}$ 内の任意の Cauchy 列 $(a_k)_k$ は極限点をもつ. このことより, $\mathbb{R}^n$ も同様の完備性をもつ. □

点列の収束を用いて連続写像を定義する.

---

[*] Web site: https://ykyki.net/

定義 1.3. A, B をそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m$ の部分集合とする．写像 $f\colon A \to B$ が**連続**であるとは, 次の条件を満たすことである: A 内の点列 $(a_k)_k$ が点 $p \in A$ に収束しているならば常に, B 内の点列 $(f(a_k))_k$ が点 $f(p) \in B$ に収束する．
特に, f が全単射であり, その逆写像 $f^{-1}\colon B \to A$ も連続であるとき, f は**同相写像**であるという． □

例 1.4. 基本的な連続写像の例を挙げる．

(1) $A = B = \mathbb{R}$ の場合をまず考えよう．恒等写像 $x \mapsto x$ や定値写像 $x \mapsto q_0$ は連続である．また, 2 つの写像 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が両方ともに連続であるとき, 写像 $x \mapsto f(x) + g(x)$ や写像 $x \mapsto f(x)g(x)$ はどちらも連続になる．よって例えば多項式関数は, これらの操作を組み合わせて定義できることより連続である．

(2) 写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\,;\, x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ が連続であることと, 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について写像 $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が連続であることは同値である．

(3) $f\colon A \to B$ が連続であるとき, A の部分集合 A' に定義域を制限した写像 $f|_{A'}\colon A' \to B$ も連続である．また $\mathbb{R}^n$ の部分集合 B' が $f(B) \subseteq B'$ を満たすとき, f の終域 B を B' に取り換えて定義される写像 $A \to B'$ も連続である．

(4) $\mathbb{R}^m$ 全体で定義された関数は定義域を狭めても連続のままであるが, $\mathbb{R}^m$ の部分空間上で定義された関数が必ずしも $\mathbb{R}^m$ 全体を定義域とする連続写像に延長できる訳ではない．例えば $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\,;\, \mathbb{R}\,;\, x \mapsto 1/x$ は, $\mathbb{R}$ 全体へと連続に延長することはできない．一方で, 元々の定義域 A が閉集合であるときには必ず $\mathbb{R}^m$ 全体に延長できることは証明できる (演習). □

本稿の目標である Brouwer の不動点定理を記すのに必要な準備が整った．

定理 1.5 (Brouwer の不動点定理). 実数空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合として, n 次元閉球体 $\mathbb{B}^n$ を

$$\mathbb{B}^n \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho\,(0, x) \leq 1\}$$

と定義する．このとき任意の連続写像 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ は不動点をもつ．つまり, ある点 $x \in \mathbb{B}^n$ が存在して $f(x) = x$ を満たす． □

証明にあたり, この定理を直接示すのではなく, 閉球体 $\mathbb{B}^n$ を単体 Δ^n に置き換えた次の定理を代わりに考える．

定理 1.6. 実数空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合として, n 次元単体 Δ^n を

$$\Delta^n \;:=\; \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \geq 0 \text{ かつ } x_1 + \cdots + x_n \leq 1\right\}$$

と定義する．このとき任意の連続写像 $f\colon \Delta^n \to \Delta^n$ は不動点をもつ． □

定理 1.6 が証明できれば, 次の演習にある同相写像 $\mathbb{B}^n \to \Delta^n$ を経由することで, 定理 1.5 が直ちに従う．

演習 1.7. 同相写像 $h\colon \mathbb{B}^n \to \Delta^n$ が存在する． ■

そこで以降では定理 1.6 を目標としていくが, 本稿で主に取り扱うのは $n = 1, 2$ の場合のみである．しかし, これから説明する $n = 2$ に対する手法は, 一般の n の場合へと自然に拡張できる．その詳細は読者に委ねる．
さて, まず最も簡単な $n = 1$ の場合を考えよう．このとき $\Delta^1 = [0, 1]$ である．そこで中間値の定理が有効である．

定理 1.8 (中間値の定理). $a < b$ を実数とし, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続写像であって $f(a) < f(b)$ を満たすものとする．このとき, $f(a) < q < f(b)$ を満たす任意の実数 q に対し, ある点 $p \in [a, b]$ が存在して $f(p) = q$ となる． □

証明. もし仮にこのような p が存在しなかったとする．このとき閉区間 $[a, b]$ 内の任意の点 x について $f(x) \neq q$ である．
閉区間 $[a, b]$ 内に 2 つの点列を次のようにして帰納的に定義する: まず $(a_0, b_0) := (a, b)$ とおく[*1]．次に k で定義されたとして,

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) \;:=\; \begin{cases} \left(a_k, \dfrac{a_k + b_k}{2}\right) & ;\; f\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) > q \text{ のとき} \\[2ex] \left(\dfrac{a_k + b_k}{2}, b_k\right) & ;\; f\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right) < q \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．すると以下のことが成立している:

(1) $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 = b$ である．

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $f(a_k) < q < f(b_k)$ かつ $b_k - a_k = \dfrac{b - a}{2^k}$ である．

よって点列 $(a_k)_k$ は Cauchy 列である．したがって極限点 $p \in \mathbb{R}$ が存在する．点列 $(b_k)_k$ も p に収束している．また $p \in [a, b]$ となっている．さらに, $f(a_k) < q$ より, $k \to \infty$ を考えると f の連続性より $f(p) \leq q$ である．同様に

[*1] 2 つの点の組 (a, b) を表す記号と, 開区間 (a, b) とが同じであるが, 文脈で判別できる．

$f(p) \geq q$ が分かる. ゆえに $f(p) = q$ となり, 背理法の仮定に矛盾した. ■

系 1.9. 連続写像 $f\colon \Delta^1 \to \Delta^1$ は不動点をもつ. □

証明. 連続写像 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $g(x) := x - f(x)$ で定める. すると g は連続である. $g(x) = 0$ となる点 x を見つけられればよい. もし g について, $g(0) = 0$ または $g(1) = 0$ が成立すれば, それぞれ $0, 1$ が f の不動点である. そうでないときは $g(0) < 0 < g(1)$ となるので, 中間値の定理よりある点 x で $g(x) = 0$ である. ■

こうして $n = 1$ の場合に不動点定理が証明できた. 逆に, $n = 1$ の不動点定理を用いて中間値の定理を証明することもできる.

次に $n = 2$ の場合を考える. このときは, $\mathbb{R}$ の順序に基づいた中間値の定理に相当するものがないために, $n = 1$ の証明をすぐに一般化することはできない. そこで別の方法を採る. 第 4 節で証明を行い, 第 2 節と第 3 節ではその準備をする.

2 実数空間のコンパクト部分空間

定義 2.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**コンパクト**[*2]であるとは, 次の条件を満たすことである: A 内の任意の点列 $(a_k)_k$ に対し, 部分列 $(a'_k)_k$ と点 $p \in A$ が存在して $a'_k \to p$ となる[*3]. □

例えば $\mathbb{R}^n$ や開球体 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(0,x) < 1\}$ はコンパクトではない. 前者は非有界な点列を, 後者は $\rho(0, x_0) = 1$ となる点 x_0 に内部から近づいていく点列を考えればよい. これらの例のように, 点列が《逃げる》ことができるとコンパクト性が成り立たない. 一方で次の定理が証明できる. これが本節の目標である.

定理 2.2. 単体 Δ^n はコンパクトである. □

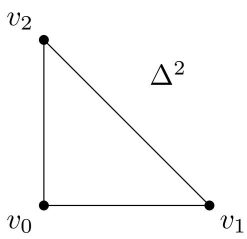
この定理を示すためにいくつか準備をする. また, 前節で述べたように $n = 2$ の場合を主に考える. ここで導入する関数や概念は後の証明でも用いる.

補題 2.3. 単体 Δ^n は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である. つまり, Δ^n 内の点列 $(a_k)_k$ が点 $p \in \mathbb{R}^n$ に収束するとき, $p \in \Delta^n$ である. □

証明. 一般の場合も全く同様であるが, ここでは簡単のために $n = 2$ に限定して証明する.

まず 3 つの連続写像 $w_0, w_1, w_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する:

$$x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} w_0(x) & := \ 1 - x_1 - x_2 \\ w_1(x) & := \ x_1 \\ w_2(x) & := \ x_2\ , \end{cases}$$



この 3 つ w_0, w_1, w_2 はそれぞれ点 $v_0 := (0,0), v_1 := (0,1), v_2 := (1,0) \in \Delta^2$ に関する x の《重さ》を表している. これらについて以下のことが成立する:

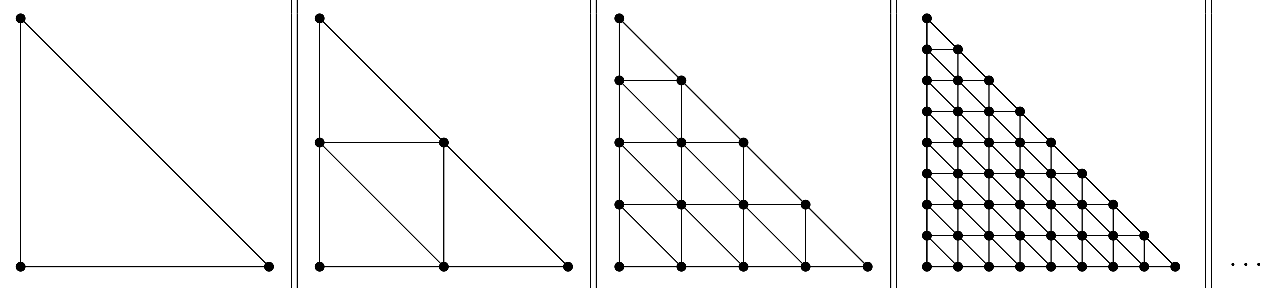
(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ について $w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) = 1$ である.
(2) 点 $x \in \mathbb{R}^2$ が Δ^2 に属することと, 3 つの値 $w_0(x), w_1(x), w_2(x)$ が全て 0 以上になることは同値である.
(3) 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^2$ について, 不等式 $w_i(x) \leq w_i(y)$ がどの $i \in \{0,1,2\}$ でも成立していれば $x = y$ である (後で用いる).

さて, Δ^2 内の点列 $(a_k)_k$ が点 $p \in \mathbb{R}^2$ に収束しているとする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ で $w_0(a_k) \geq 0$ であるから, 連続性より $w_0(p) \geq 0$ である. w_1, w_2 についても同様である. よって $p \in \Delta^2$ となる. ■

次に Δ^2 の細分 Δ^2_N を定義する. $N \in \mathbb{N}$ を自然数とする. Δ^2 の 3 辺 $|v_0v_1|, |v_1v_2|, |v_2v_0|$ をそれぞれ 2^N 等分し, それらを次の図のように線分で結ぶ:

[*2] この条件は実は, 位相空間論でよく知られている「コンパクト」の定義ではなく, 正確には「点列コンパクト」の定義である. しかし $\mathbb{R}^n$ の部分集合については同値な条件であるため, 本稿では後者の定義を以って「コンパクト」を定義した. さらに言えば, 実は定義 1.3 も「sequentially continuous」の定義であり, 「連続写像」の定義そのものとは異なるが, $\mathbb{R}^n$ では同値である. これらの同値性は一般の位相空間では成立しない.

[*3] 点列 $(a'_k)_k$ が $(a_k)_k$ の**部分列**であるとは, 狭義単調増加な写像 $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, 全ての $k \in \mathbb{N}$ で $a'_k = a_{\phi(k)}$ が成立することである. ここで狭義単調増加とは, $m < n$ ならば $\phi(m) < \phi(n)$ となることを意味する.



$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$\cdots$
頂点 3, 辺 3, 面 1	頂点 6, 辺 9, 面 4	頂点 15, 辺 30, 面 16	頂点 45, 辺 108, 面 64	$\cdots$

このようにして得られた細分 Δ^2_N はいくつかの頂点, 辺, 面から成っている. Δ^2_N の各面 P は三角形であり, 次の 2 つの性質を満たしている:

(1) P の直径は $\frac{\sqrt{2}}{2^N}$ 以下である. つまり, P の任意の 2 点 x, y について $\rho(x, y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^N}$ となる.

(2) P は Δ^2_{N+1} のちょうど 4 つの面へと分割される.

これらの性質を用いて, Δ^2 のコンパクト性を示す.

証明 (定理 2.2). Δ^2_N 内の点列 $(a_k)_k$ を任意に与える. N に関して帰納的に Δ^2_N の面 P_N と自然数 $\phi(N)$ を選ぶことで, 次の条件を満たすようにできる:

(a) $a_{\phi(N)} \in P_N$ である.

(b) $\mathbb{N}$ の部分集合 $\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k > \phi(N) \text{ かつ } a_k \in P_N\right\}$ が無限集合になる.

(c) $N \geq 1$ ならば, $P_{N-1} \supseteq P_N$ かつ $\phi(N-1) < \phi(N)$ である.

このことを示そう.

まず $N = 0$ のときは, P_0 は Δ^2_0 の唯一の面とし, $\phi(0) := 0$ とおく[*4]. 次に, P_{N-1} と $\phi(N-1)$ が条件を満たすように定義されたと仮定する. P_{N-1} は Δ^2_N のちょうど 4 つの面に分割されているので, その内のある面 P について集合 $\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k > \phi(N-1) \text{ かつ } a_k \in P\right\}$ が無限集合になる. これを以って $P_N := P$ とおく. $\phi(N)$ は例えば

$$\phi(N) := \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k > \phi(N-1) \text{ かつ } a_k \in P_N\right\}$$

とおく. すると P_N と $\phi(N)$ は条件を全て満たす.

すると $(a_{\phi(N)})_N$ は $(a_N)_N$ の部分列であり, さらに Cauchy 列であるから極限点 $p \in \mathbb{R}^2$ をもつ. 補題 2.3 より $p \in \Delta^2$ である. ■

3 Sperner の補題

前の節では Δ^2 の位相的 (topological) な側面を調べた. 今度は組み合わせ的 (combinatorial) な側面をみる. 以下, この節では自然数 N をひとつ固定しておく.

定義 3.1. 細分 Δ^2_N の**彩色** (coloring) とは, 写像

$$\alpha \colon \left\{v \in \Delta^2 \,\middle|\, v \text{ は} \Delta^2_N \text{の頂点}\right\} \to \{0, 1, 2\}$$

であって, 次の条件を満たすもののことである:

(a) Δ^2 の頂点 v_i について $\alpha(v_i) = i$ である.

(b) 頂点 v が Δ^2 の辺 $|v_i v_j|$ の上にあるならば, $\alpha(v) \in \{i, j\}$ である. □

定義 3.2. 細分 Δ^2_N の彩色 α が与えられたとき,

(1) Δ^2_N の辺 e が**赤色**[*5]であるとは, その辺の端点を $\{v, v'\}$ としたときに, $\{\alpha(v), \alpha(v')\} = \{0, 1\}$ となることである.

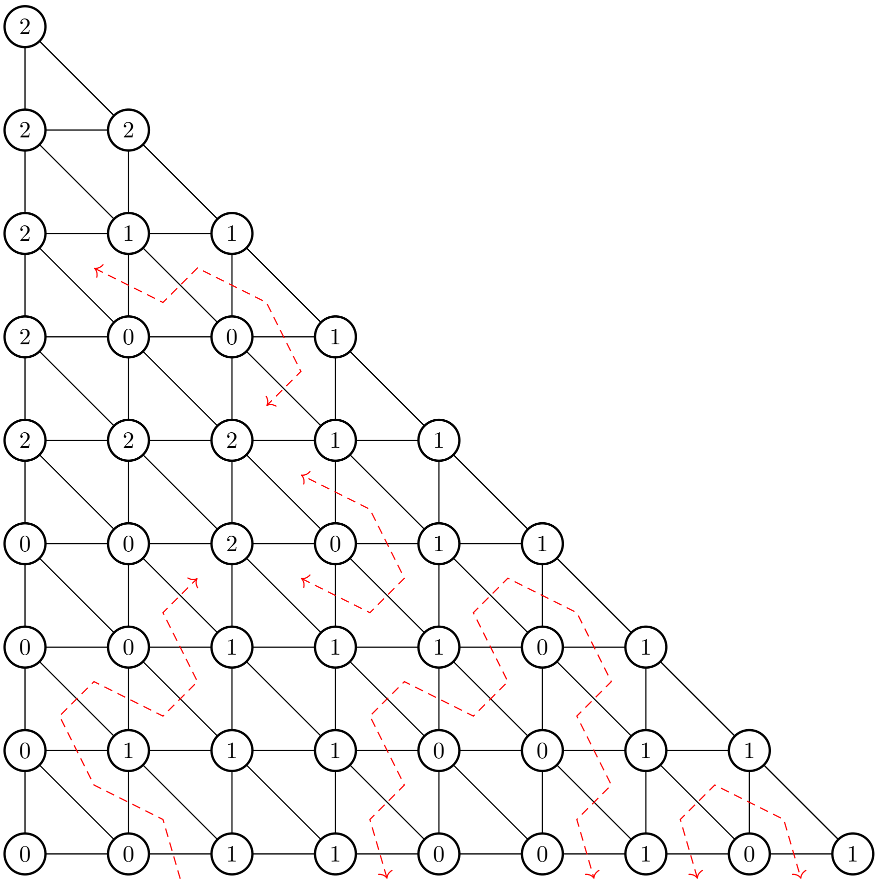
(2) Δ^2_N の面 P が**虹色**であるとは, その面の頂点を $\{v, v', v''\}$ としたときに, $\{\alpha(v), \alpha(v'), \alpha(v'')\} = \{0, 1, 2\}$ となることである. □

定理 3.3 (Sperner の 補題). 任意の彩色 α に対し, Δ^2_N にある虹色の面の個数は奇数である. 特に, 虹色の面が少なくともひとつは存在する. □

[*4] 値は 0 でなくてもよい

[*5] 色の名前はなんでもよい.

証明. まず次が成り立つ: Δ^2 の 1 辺 $|v_0v_1|$ 上には Δ_N^2 の赤い辺が奇数個ある[*6]. 実際, $|v_0v_1|$ 上には 0 か 1 の色をもつ頂点しかなく, v_0 から v_1 に向かうときに, 赤い辺を通過することで頂点の色が入れ替わる. v_0, v_1 の色はそれぞれ $0, 1$ であったから, よって奇数回の赤い辺を通過することになる.



次に虹色の面の個数を数えていく. Δ_N^2 の各面 P がもつ赤い辺の個数は $2, 1, 0$ 個のいずれかである. 加えて, P が虹色になることは赤い辺をちょうどひとつもつことに等しい. そこで次のような操作を考える: 辺 $|v_0v_1|$ 上にある赤い辺をひとつ選び, そこをスタート地点にして, 赤い辺を跨ぎながら隣接する面へ移動していく. 各面の赤い辺の個数は 0 でなければ 1 か 2 なので, 途中で行き詰るか, あるいは再び Δ^2 の辺に出るまで一意的に進行していく. 行き詰れば, そのときにいる面は虹色である. 外に出るときは, 彩色の定義より $|v_0v_1|$ 上の辺に出る. この操作は可逆であるから, 外に出る辺同士でペアリングできる. よって, $|v_0v_1|$ 上の赤い辺の個数が奇数個であったから, $|v_0v_1|$ 上の辺から出発して到達しうる虹色の面の個数は奇数個である. また, 到達し得ない虹色の面も存在する可能性があるが, 同様の操作を考えることで, そうした面どうしで再びペアリングされる. ゆえに虹色の面の個数は奇数である. ■

4　Brouwer の不動点定理

前の 2 節で準備が整ったので, $n = 2$ の場合の不動点定理の証明をする.

証明 (Brouwer の不動点定理, 定理 1.6). まず $N \in \mathbb{N}$ を固定し, 次で定義される, Δ_N^2 の彩色 α を考える:

$$\alpha(v) \;:=\; \min\left\{ i \in \{0,1,2\} \;\middle|\; \begin{array}{c} w_i(v) \neq 0 \text{ かつ} \\ w_i(v) \geq w_i(f(v)) \end{array} \right\}$$

と定義する[*7]. 任意の $v \in \Delta_N^2$ に対し, この条件を満たす i は必ず存在することに注意する. なぜなら, もし存在しなければどの i でも $w_i(v) \leq w_i(f(v))$ であり, またある i で真の不等号が成立するため, $\sum_i w_i(v) = 1 = \sum_i w_i(f(v))$ に矛盾する. また α が実際に彩色の条件を満たしていることも, $w_i(v)$ の性質より直ちに従う. よって Sperner の補題 (定理 3.3) より, Δ_n^2 の虹色の面が少なくともひとつ存在する. これを P_N とし, その頂点 a_N^0, a_N^1, a_N^2 を $\alpha(a_N^i) = i$ を満たすように番号づける.

単体 Δ^2 がコンパクトであったから (定理 2.2), Δ^2 内の点列 $\left(a_N^0\right)_N$ の部分列 $\left(a_{\phi(N)}^0\right)_N$ が存在して点 $p \in \Delta^2$ に収束する. P_N の直径は $N \to \infty$ で 0 に収束したので, $\left(a_{\phi(N)}^1\right)_N$ と $\left(a_{\phi(N)}^2\right)_N$ も p に収束する.

各 i について, α の定義より $w_i\left(a_{\phi(N)}^i\right) \geq w_i\left(f\left(a_{\phi(N)}^i\right)\right)$ が任意の $N \in \mathbb{N}$ で成立していたので, w_i と f の連続

[*6] これは Sperner の補題の $n = 1$ の場合に相当している.

[*7] 最小の i でなくとも, 記されている条件をみたすものであればよい.

性より $w_i(p) \geq w_i(f(p))$ となる．これが全ての i で成立していたので, ゆえに $p = f(p)$ である． ■

5 応用と展開

Brouwer の不動点定理の応用を紹介する．見やすい応用例として何か命題の証明を用意したかったが, 説明するにあたって用語の定義や基本的な命題がそこそこ必要になりそうだったので, ここでは定理と参考文献の紹介に留める．

定理 5.1 (領域不変定理). U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を連続な単射とする．このとき f による U の像 $f(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合になる． □

この定理より次の定理が直ちに従う．

定理 5.2 (実数空間の次元の不変性). $m > n$ とするとき, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への連続な単射は存在しない．特に $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ は同相ではない． □

この 2 つの定理の参考文献として [1] と [4] がある．

m, n が相異なるときに $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ が同相にならないことは, 「同相写像は《連続的な》変換を行う」という感覚に基づけば明らかに思えるかもしれないが, 実際に証明するには上の定理のような準備を少し要する．また, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A であって, $A \times A$ と A が同相になるものがいくつか存在することが知られている．例えば $n = 1$ のときには, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 無理数の集合 $\mathbb{P}$, Cantor 集合 $\mathcal{C}$ などがその例でなる．

定理 5.3 (Jordan 閉曲線定理). $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ を円周 $\mathbb{S}^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \rho(0, x) = 1\right\}$ からの連続単射とする．その像を $J := f(\mathbb{S}^1)$ とすると, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ はちょうど 2 つの連結成分をもち, それらの境界はどちらも J に等しい． □

参考文献は [3] である．

今回は不動点定理を組み合わせ的手法を用いた初等的な手法で示した．本稿のような説明方法は [2] による．不動点定理の証明方法は他にも, 写像度を用いるものや, ホモロジー論を利用するものなどがある．この方向からのアプローチは [5] が詳しい．応用例についてもこの本に色々と載っている．

参考文献

[1] W. Kulpa. *Poincaré and domain invariance theorem.* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 39 , no. 1-2, 127-136. 1998.

[2] P. Lo. *A combinatorial approach to the Brouwer fixed point theorem.* 2016. `http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Lo.pdf`

[3] R. Maehara. *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem.* The American Mathematical Monthly, 91(10), 641-643. 1984.

[4] T. Tao. *Brouwer's fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert's fifth problem.* `https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/`

[5] 中岡稔. 『不動点定理とその周辺』. 岩波書店. 1977.